資産価格の確率的な予測と投資先の選択

Stochastic Forecasting of the Asset Price
and the Selection of Investment

上　野　皓　司
Ueno,　Koji

ABSTRACT

The method of theoretical selection of investment to two assets is discussed. Two-dimensional density functions are examined for it. If expectations, variances, or correlation coefficients are different about many assets, how much differences of the probability of forecasting to those assets are there? Some examples of calculation are illustrated.

Markowitz は 1952 年に投資資産の集合をポートフォリオ（Portfolio）と名づけ，その一定期間中の収益率の期待値（E）と分散（V）によって資産選択をするE－V 理論を提唱した。その後市場の動きや多数の投資家を考慮し，特定資産と市場収益率の連動関係を表すベータ（β）を導入した資本資産価格モデル（Capital Asset Pricing Model）が 1964 年に Sharpe，1965 年に Lintner によって提唱された。現在資産選択は複数市場間にまで拡大し，分析方法も多様化している。以下では最近の研究の一端を概観する。

まず分析方法としては，Jacobs（1999）は，近年の研究は代表的な消費者の終生の期待される効用を極大化するための行動に注目することによって株価や債券価格を分析することに努力が払われてきたと述べ，その延長線上でオイラー方程式による資産価格形成の一つの理論モデルを提示している。Pástor（2000）は，多数の資産の中から最も有利な資産を選ぶための方法は大きくは 2 種類あり，一つは過去の平均値や分散から選択する方法，他は予め前提された資産価格

モデルから指定された資産の間から選択する方法であると述べ，資産価格モデルによる新たな選択の方向を目指している。At-Sahalia and Brandt（2001）は，これまでの資産選択の基準は，現実には配当，簿価と市場価格の比率，企業の純利益，国債の利子，等についての期待値や分散，共分散のような簡単な数値のみによって行われていると述べ，高次のモーメント，すなわち $E(X-a)^k$（$k=0, 1, 2, \cdots$）による予測方法を検討している。

分析対象としては，Blanchard, Rhee and Summers（1993）は市場の評価（market valuation）とファンダメンタル（fundamentals）が異なるとき，投資家はどの指標を重視して売買を決めるであろうか，と問いかけ，過去90年の株式市場の歴史から，市場の評価は売買の決定に限られた役割しか果たさず，1929年や1987年の大衝撃の時期でも市場の評価のファンダメンタルからの乖離は広く疑われており，株価の予測はファンダメンタルによって行われなければならないと強調している。Santis and Gerard（1997）は，資本資産価格モデルにより，G7のカナダ，フランス，ドイツ，イタリー，日本，イギリス，アメリカ，とスイスの合計8ヵ国の株式指数による月別収益をMSCI＝Morgan Stanley Capital Internationalの1970年から1994年までの資料により分析し，8ヵ国の株式市場に分散投資したさいには，最近の世界的な景気の下降のなかでも平均2.11％の利益を期待することができ，過去20年間この利益はさほど低下していない，と述べている。Calvet and Fisher（2002）は米ドルとマルク，株式市場の全体指数や一部の個別銘柄について，それらの収益がどのような定型的な動きをするかを分析し，特に米ドルとマルクに強い定型的な動きを見出し，一つの株式指数と五つの個別銘柄にもその動きを見出している。Brennan and Xia（2002）はインフレのもとで現金，株式，債券についてどのような保有を選択するのが最も有利かを，利子や名目額の減価を考慮しながら一定期間について検討している。

具体的な家庭の選択が主要な問題であるが，Heaton and Lucas（2000）は，変化のある事業所得に依存している家計は株式のようなリスクの多い資産には少なく投資している，と述べ，消費財源調査（SCF＝Survey of Consumer Finances）

の内容を詳しく分析している。1995年の消費財源調査によれば，家計保有資産の平均的な割合は，純資産が1万から10万ドルの約804万所帯では株式17.7%，債券3.8%，現金12.5%，事業2.3%，年金8.6%，不動産55.0%，10万から100万ドルの約1373万所帯では株式20.2%，債券5.2%，現金9.9%，事業3.7%，年金7.6%，不動産53.3%，100万ドル以上の約199万所帯では株式33.2%，債券9.2%，現金5.4%，事業19.1%，年金2.6%，不動産30.6%であり，世帯主の年齢が35から49歳の約846万所帯では株式16.2%，債券3.5%，現金6.5%，事業5.4%，年金10.6%，不動産57.7%，年齢が50から64歳の約565 万所帯では株式23.6%，債券5.1%，現金8.8%，事業6.8%，年金7.1%，不動産48.3%，年齢が65歳以上の約577万所帯では株式24.6%，債券7.1%，現金17.1%，事業2.4%，年金1.5%，不動産47.3%であり，資産や年齢が高くなるにしたがって株式の保有が増大している。Faig and Shum（2002）は個人が事業や住居に投資しているときには他の資産についてはリスクの少ないものを選ぶと述べ，個人が年齢によってどのような資産選択をしているかを分析している。Vissing-Jorgensen（2002）は米国の消費支出調査（CEX＝Consumer Expenditure Survey）の資料により，異時点間の消費の代替の弾力性（EIS＝Elasticity of Intertemporal Substitution）を測定し，株式等の資産を多く保有する世帯の異時点間の消費の代替の弾力性は少ない資産の世帯より大きいと述べている。保有資産の多い世帯は消費が多様であり，異時点間の選択が豊富であることによると考えられる。

また企業の選択について，Holmström and Tirole（2001）は企業金融（Corporate Finance）の視点から，企業は流動性（Liquidity）を蓄えることを望むために，資産価格の予測も流動性を重視した方法によって行われなければならないことを強調している。

今後の課題として，Campbell（2000）は株式市場を対象に予測の理論が現実の場ではあまり役に立たないという事実を指摘し，新たな理論が現実を考慮しつつ開発されなければならないことを強調している。

1. 資産価格の確率的な推移

上記のように資産選択の方法は多様であるが，以下では債券と株式，債券や株式と不動産等2種類の資産を対象に過去の資料の統計的な処理によってどのような情報が得られるかを考える。期待値や分散の利用はE－V理論によって方向を定められているが，基本的な分析視点に立ち返り将来の予測方法を検討する。過去の動きからの予測は経済環境や公的政策の急激な変化によって大きく動揺させられることがあるが，ここでは過去の動きを継承している資産を考える。(1)

1－1. 予測方法

A と B 二種類の資産の過去の価格の系列 X と Y を

$$X = \{x(-1),\ x(-2),\ x(-3),\ \cdots\cdots,\ x(-m)\}$$

$$Y = \{Y(-1),\ Y(-2),\ Y(-3),\ \cdots\cdots,\ Y(-m)\}$$

と表す。$x(-1)$ は現在から1時点前の，$x(-m)$ は現在から m 時点前の A の価格であり，$y(-1)$ は現在から1時点前の，$y(-m)$ は現在から m 時点前の B の価格であり，X と Y はそれらの価格の集合である。これらの資料から T 時点の価格を予想する方法としては，(1) X と Y をそれぞれ別個に時間 t との関係で調べ，T に対応する価格を予測する，(2) 過去の各時点に対応する A と B の価格の関係から，予測が容易な資産の T 時点の価格をまず計算し，その資産価格との関連で他の資産価格を予測する，(3) X と Y の過去の資料から0から T までの期間に対応するそれぞれの期待値や分散および共分散を計算し，分布関数や

（1） Alvarez, Atkeson, Kehoe（2002）は，公開市場操作による貨幣の注入は市場で債券などを売却した人々の消費を増大させ，その結果実質利子率の低下と実質為替相場の減価を導き，さらに資産価格にも影響を及ぼす，と述べている。貨幣供給の増大という経済環境の変化が資産価格の予測のさいに過去の資料のみからの予測の修正を要求していることを示唆している。予測のさいには政府の経済政策や国際情勢の変化など多様な要因を考慮しなければならない。

密度関数から T 時点の確率的な価格の広がりを予測する，等が考えられる。

(1)は時間 t とそれぞれの資産から 2 種類の回帰分析を行う方法であり，(2)は予測が容易な資産価格にまず回帰分析を行い，両資産の関連から T 時点の他の資産価格をも予想する方法であり，(3)は一定期間の資料の期待値や分散，共分散等の計算から確率に対応する予想価格を知る方法である。(3)はまたさらに二種類に分けられ，各資産価格をそれぞれ別個に計算する場合と，二つの資産価格を総合的に予想する場合とである。

1－2. 回帰分析

まず(1)について考える。(1)は X と Y をそれぞれ別個に時間 t との関係で調べ，横軸に時間 t，縦軸に A と B の価格をとり，線形や非線形の回帰分析をほどこす。線形が妥当と判断されれば，過去の資料から $x=\alpha_1 t+\beta_1$ と $y=\alpha_2 t+\beta_2$ の係数 α，β や資産価格と時間との相関係数が計算される。対数回帰では $x=\alpha_1 lnt+\beta_1$ と $y=\alpha_2 lnt+\beta_2$，指数回帰では $x=\alpha_1 \exp(\beta_1 t)$ と $y=\alpha_2 \exp(\beta_2 t)$ あるいは $lnx=ln\alpha_1+\beta_1 t$ と $lny=ln\alpha_2+\beta_2 t$，べき乗回帰では $x=\alpha_1 t^{\beta_1}$ と $y=\alpha_2 t^{\beta_2}$ あるいは $lnx=ln\alpha_1+\beta_1 lnt$ と $lny=ln\alpha_2+\beta_2 lnt$，逆数回帰では $x=\alpha_1+\beta_1(1/t)$ や $y=\alpha_2+\beta_2(1/t)$ の係数や相関係数が計算される。また非線形の 2 次回帰では $x=\alpha_1 t^2+\beta_1 t+\gamma_1$ と $y=\alpha_2 t^2+\beta_2 t+\gamma_2$ の係数 α，β，γ や決定係数が計算される。

(2)はまず X あるいは Y について時点 t との間で上記のような回帰分析を行い，次に X と Y の間で回帰分析を行う。X と t の回帰分析から将来時点 T の予測値 $X(T)$ が計算されれば，X と Y の回帰分析から $X(T)$ に対応する予測値 $Y(T)$ を求める。

(1)と(2)はいずれも将来時点 T の X と Y の一定値を計算している。しかしこれらの一定値がどの程度の可能性で実現されるかは説明していない。どの程度で実現されるかを説明するためには T 時点の X や Y の各種の値に対する確率が示されなければならない。この各種の値に対する確率は分布や確率密度の

計算によって得られる。

1−3. 確率による予測

予測時点 T が1年後であれば，現時点0から1年後までに価格がどれだけ移動するかを知るためには，過去の1年ごとにどのような価格の変化があったかを調べなければならない。もし過去10年をみれば10の標本が得られる。これらの過去の X と Y の資料を

$$X=\{x(-1),\ x(-2),\ x(-3),\ \cdots\cdots,\ x(-m)\}$$

$$Y=\{y(-1),\ y(-2),\ y(-3),\ \cdots\cdots,\ y(-m)\}$$

とすれば，$T=1$ 年後を予測するために過去の m 年間の m 個の標本が得られたことになる。

これらの資料から期待値 EX や EY，分散 VX や VY が，

$$EX=a,\ EY=b,$$

$$VX=E(X-EX)^2=\sigma_1^2,\ VY=E(Y-EY)^2=\sigma_2^2$$

と計算される。a，b，σ_1，σ_2 は定数である。

最も一般的な分布である正規分布を想定すれば，X と Y の分布関数は

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma_1^2}\right)du$$

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}p(v)dv=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-b)^2}{2\sigma_2^2}\right)dv$$

であり，密度関数は，

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

である。

a，b，σ_1，σ_2 は標本の計算から先に得られ，x と y の任意の値を分布関数や密

度関数に代入すれば，それぞれの値を実現する可能性を示す確率が知られる。

これらの計算は X と Y が全く独立な動きをし，別個に予測されるときに行われるが，関連の強い動きをするときには別の方法が採用される。すなわち X と Y の動きの可能性を総合的に示す分布関数や密度関数が使用される。この可能性は 2 次元の分布関数や密度関数によって計算される。

2. 二つの資産の全体的な動き

二つの資産の全体的な動きは 2 次元正規分布の分布関数や密度関数によって計算することができる。2 次元正規分布の分布関数は

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\exp\Big[\Big(-\frac{1}{2(1-r^2)}\Big)\times\Big\{\frac{(u-a)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(u-a)(v-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(v-b)^2}{\sigma_2^2}\Big\}\Big]dudv,$$

密度関数は,

$$p(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\Big[\Big(-\frac{1}{2(1-r^2)}\Big)\times\Big\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\Big\}\Big]$$

である。$a,\ b,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ は X と Y の個々の標本から得られた期待値と分散であり,

$$EX=a,\ EY=b,$$

$$VX=E(X-EX)^2=\sigma_1^2,\ VY=E(Y-EY)^2=\sigma_2^2$$

である。r は相関係数であり,

$$r=\frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{VX\cdot VY}}$$

の関係から計算される。$E(X-EX)(Y-EY)$ は X と Y の共分散であり，共分散 $Cov(X,\ Y)=E(X-EX)(Y-EY)$ も標本から計算される。相関係数は $-1\leqq r\leqq 1$ で，$r=0$ の場合は無相関であり，$-1=r$ や $1=r$ が成立するのは X

と Y が1次関数の関係で結ばれているときであり，またそのときに限られる。

それでは期待値や分散，相関係数が異なれば，T 時点の予測はどのように変化するであろうか。以下では密度関数による二つの資産価格の確率的な動きを数値例によって考える。

2－1. 期待値だけが異なる場合

現在を0時点と考え，現在の価格を $x(0)=100$，$y(0)=100$ と仮定し，これらの値を $[x(0),\ y(0)]=[100,\ 100]$ と表す。分散の平方根のうちの正の値は標準偏差であり，以下ではこの σ_1 と σ_2 の正の値である $+\sigma_1$ と $+\sigma_2$ の標準偏差だけに着目し，それらを σ_1 と σ_2 と想定し，数値例を考える。

過去の標本から得られた標準偏差と相関係数は $[\sigma_1,\ \sigma_2,\ r]=[2.0,\ 1.0,\ 0.5]$ であったと仮定する。すなわち A の資産は現在の100に対し標準偏差2，B の資産は現在の100に対し標準偏差1の範囲で過去に変化し，相関係数は0.5であまり強い関係にはない。このとき2次元正規分布の密度関数は，

$$p(x,\ y)=\frac{1}{10.8825}\exp\left[\left(-\frac{1}{1.5}\right)\left\{\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(x-a)(y-b)}{2}+\frac{(y-b)^2}{1}\right\}\right]$$

である。

ここで過去の期待値として，① $[EX_1,\ EY_1]=[100,\ 100]$，② $[EX_2,\ EY_2]=[99,\ 99]$，③ $[EX_3,\ EY_3]=[101,\ 101]$ の3種類を想定する。このとき T 時点に一定値 $[x,\ y]$ になる確率は次のように計算される。

予測値x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率①	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010	0.0000
③	0.0000	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124

期待値が〔EX_1, EY_1〕＝〔100, 100〕であるときは，予測値〔x, y〕＝〔100, 100〕が実現する可能性が 0.0919 と最も高く，予測値〔x, y〕＝〔97, 97〕や〔x, y〕＝〔103, 103〕が実現する可能性は 0.0010 と低くなる。期待値が〔EX_1, EY_1〕＝〔99, 99〕であれば，予測値〔x, y〕＝〔99, 99〕が実現する可能性が 0.0919 と最も高く，予測値〔x, y〕＝〔98, 98〕や〔x, y〕＝〔97, 97〕が実現する可能性は期待値が〔EX_1, EY_1〕＝〔100, 100〕のときよりは高くなる。期待値が〔EX_1, EY_1〕＝〔101, 101〕のときは予測値〔x, y〕＝〔101, 101〕が実現する可能性は 0.0919 と最も高く，期待値の相違によって予測値に対応する実現の可能性が異なる。

計算されている予測値以外に〔x, y〕＝〔100, 99〕や〔x, y〕＝〔99, 100〕等多様な値が考えられるが，いずれも実現される可能性は上記の密度関数から計算される。

2－2. 分散だけが異なる場合

次に分散が異なる場合はどうであろうか。過去の標準偏差として，①〔$\sqrt{VX_1}$, $\sqrt{VY_1}$〕＝〔2.0, 1.0〕, ②〔$\sqrt{VX_2}$, $\sqrt{VY_2}$〕＝〔3.0, 2.0〕, ③〔$\sqrt{VX_3}$, $\sqrt{VY_3}$〕＝〔4.0, 3.0〕の 3 種類を想定する。過去の期待値として，①〔EX_1, EY_1〕＝〔100, 100〕を，相関係数は上記と同じ 0.5 を想定する。

この 2 次元正規分布の密度関数は，②〔$\sqrt{VX_2}$, $\sqrt{VY_2}$〕＝〔3.0, 2.0〕のときには，

$$p(x,\ y)=\frac{1}{32.6484}\exp\left[\left(-0.6667\right)\left\{\frac{(x-100)^2}{9}-\frac{(x-100)(y-100)}{6}+\frac{(y-100)^2}{4}\right\}\right]$$

であり，③〔$\sqrt{VX_3}$, $\sqrt{VY_3}$〕＝〔4.0, 3.0〕では，

$$p(x,\ y)=\frac{1}{65.2968}\exp\left[\left(-0.6667\right)\left\{\frac{(x-100)^2}{16}-\frac{(x-100)(y-100)}{12}\right.\right.$$

$$+\frac{(y-100)^2}{9}\}]$$

となる。

このとき T 時点に一定値［x, y］になる確率は次のように計算される。

予測値x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率①	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②	0.0095	0.0182	0.0269	0.0306	0.0269	0.0182	0.0095
③	0.0089	0.0120	0.0144	0.0153	0.0144	0.0120	0.0089

②［$\sqrt{VX_2}$, $\sqrt{VY_2}$］＝［3.0, 2.0］は，①［$\sqrt{VX_1}$, $\sqrt{VY_1}$］＝［2.0, 1.0］より X と Y の散らばりが 1 ずつ大きくなっている。そのために予測値［x, y］＝［100, 100］が実現する可能性は①の 0.0919 よりかなり低く 0.0306 になっている。③［$\sqrt{VX_3}$, $\sqrt{VY_3}$］＝［4.0, 3.0］では X と Y の散らばりがさらに 1 ずつ大きくなるために，予測値［x, y］＝［100, 100］が実現する可能性は 0.0153 と大幅に低くなっている。①は散らばりが小さいために予測値が期待値から離れると急激に実現の可能性が低下し，予測値［x, y］＝［103, 103］や［x, y］＝［97, 97］では 0.0010 に低下する。他方②では散らばりが大きいために予測値が期待値から離れても実現する可能性はさほど低下せず，予測値［x, y］＝［103, 103］や［x, y］＝［97, 97］でも 0.0095 である。③では散らばりがさらに大きいために予測値が期待値から離れても実現する可能性は僅かしか低下せず，予測値［x, y］＝［103, 103］や［x, y］＝［97, 97］でも 0.0089 で，②よりは低いが，予測値［x, y］＝［100, 100］の確率と比較すれば，低下の割合は①や②よりはるかに小さくなっている。

分散が大きくなれば期待値周辺の予測値が実現する可能性は小さくなり，多様な値が予想されることを示しているが，密度関数は分散の程度による予想値の広がりの可能性を数値によって示唆している。

2−3. 相関係数だけが異なる場合

次に相関係数だけが異なる場合はどうであろうか。過去の相関係数として，①$r=0.5$，②$r=0.9$，③$r=0.3$ の3種類を想定する。過去の期待値は，①$[EX_1, EY_1]=[100, 100]$ を，標準偏差は①$[\sqrt{VX_1}, \sqrt{VY_1}]=[2.0, 1.0]$ を想定する。

このとき2次元正規分布の密度関数は，②$r=0.9$ では，

$$p(x, y)=\frac{1}{5.4776}\exp\left[\left(-\frac{1}{0.38}\right)\left\{\frac{(x-100)^2}{4}-1.8\frac{(x-100)(y-100)}{2}+\frac{(y-100)^2}{1}\right\}\right],$$

③$r=0.3$ では，

$$p(x, y)=\frac{1}{11.9876}\exp\left[\left(-\frac{1}{1.82}\right)\left\{\frac{(x-100)^2}{4}-0.6\frac{(x-100)(y-100)}{2}+\frac{(y-100)^2}{1}\right\}\right]$$

である。

それでは X と Y が全く無関係な動きをする $r=0$ の場合はどうであろうか。このとき過去の期待値が，①$[EX_1, EY_1]=[100, 100]$，標準偏差が，①$[\sqrt{VX_1}, \sqrt{VY_1}]=[2.0, 1.0]$ では，2次元正規分布の密度関数は，

$$p(x, y)=\frac{1}{12.5664}\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(x-100)^2}{4}-0.0\frac{(x-100)(y-100)}{2}+\frac{(y-100)^2}{1}\right\}\right]$$

である。

$r=0$ では X と Y について個々に1次元の密度関数を使用すればどうであろうか。1次元の密度関数は X と Y それぞれについて，

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

であるが，期待値が，① $[EX_1,\ EY_1]=[100,\ 100]$，標準偏差が，① $[\sqrt{VX_1},\ \sqrt{VY_1}]=[2.0,\ 1.0]$ では $p(x)$ と $p(y)$ は

$$p(x)=\frac{1}{5.0133}\exp\left(-\frac{(x-100)^2}{8}\right)$$

$$p(y)=\frac{1}{2.5066}\exp\left(-\frac{(y-100)^2}{2}\right)$$

であり，2次元の密度関数に対応する $[x,\ y]$ は，$p(x)\times p(y)$ より計算される。

X と Y が全く一致した動きをする $r=1$ の場合はどうであろうか。このとき2次元正規分布の密度関数の分母 $2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}$ が0となるために $p(x,\ y)$ は無限大になり，別の式を使用しなければならない。$r=1$ では X と Y の標準偏差はいずれも等しくなると考えられるが，期待値100，標準偏差2.0の X と Y の $p(x)$ と $p(y)$ および期待値100，標準偏差1.0の X と Y の $p(x)$ と $p(y)$ はどのような値になるであろうか。前者の1次元密度関数は

$$p(x)=\frac{1}{5.0133}\exp\left(-\frac{(x-100)^2}{8}\right),$$

後者の密度関数は

$$p(x)=\frac{1}{2.5066}\exp\left(-\frac{(x-100)^2}{2}\right)$$

であり，X と Y はいずれも同じ確率で予想値を実現する。

上記のそれぞれの密度関数の T 時点の一定値 $[x,\ y]$ に対応する確率を計算すれば以下のようになる。

予測値 x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率①	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②	0.0000	0.0046	0.0727	0.1826	0.0727	0.0046	0.0000
③	0.0008	0.0103	0.0495	0.0834	0.0495	0.0103	0.0008
r＝0	0.0003	0.0065	0.0426	0.0796	0.0426	0.0065	0.0003
p(x)	0.0648	0.1210	0.1760	0.1995	0.1760	0.1210	0.0648
p(y)	0.0044	0.0540	0.2420	0.3989	0.2420	0.0540	0.0044
p(x)×p(y)	0.0003	0.0065	0.0426	0.0796	0.0426	0.0065	0.0003
r＝1							
p(x)＝p(y)	0.0648	0.1210	0.1760	0.1995	0.1760	0.1210	0.0648
p(y)＝p(x)	0.0044	0.0540	0.2420	0.3989	0.2420	0.0540	0.0044

$[x, y]=[100, 100]$ は $r=0.9$ では 0.1826 と最も高く，$r=0.3$ では 0.0834 とかなり低く，$r=0$ では 0.0796 と最も低くなる。$r=0$ のさいは 2 次元密度関数で計算した値と，X と Y を 1 次元密度関数で別個に計算し $p(x)\times p(y)$ によって得た値とが等しいことが示されている。$r=1$ では 2 次元密度関数が使用できないために X か Y かについて 1 次元密度関数により計算しなければならない。標準偏差が 2.0 では $[x, y]=[100, 100]$ が実現される可能性は 0.1995 であり，$r=0.9$ の 0.1826 より大きく，標準偏差が 1.0 では $[x, y]=[100, 100]$ が実現される可能性は 0.3989 で，$r=0.9$ よりさらに大きくなっている。

3. 二つの資産の合計額の実現可能性

二つの資産に投資するとき T 時点に全体としての資産価格の合計に注目することがある。例えば株式への投資額と不動産への投資額の合計が一定であれば，両者の個々の額の変化はいずれでもよいことがある。このようなときには X と Y の合計額がどのような確率で実現されるかに着目される。

上記と同様に確率変数 X と Y が正規分布でその密度関数が

$$p(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\Big[\Big(-\frac{1}{2(1-r^2)}\Big)$$

$$\left\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}\Bigg]$$

であるとき，両者の和 $W=X+Y$ の確率密度関数 $p_w(x+y)=p_w(z)$ は，

$$p_w(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\times\exp\left(-\frac{(z-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+2r\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}\right)$$

となる。期待値や分散，相関係数が異なるとき合計値が実現される可能性はどのように相違するであろうか。

3－1. 期待値だけが異なる場合

過去の標本から得られた標準偏差と相関係数は上記と同様に［σ_1, σ_2, r］＝［2.0, 1.0, 0.5］を仮定する。このとき合計の密度関数は，

$$p_w(z)=\frac{1}{6.6319}\exp\left(-\frac{(z-a-b)^2}{14}\right)$$

であり，過去の期待値として，上記と同様に，①［EX_1, EY_1］＝［100, 100］，②［EX_2, EY_2］＝［99, 99］，③［EX_3, EY_3］＝［101, 101］の3種類を想定する。このとき T 時点に一定値 $x+y$ になる確率は次のように計算される。

予測値x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率①	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010	0.0000
③	0.0000	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124
予測値x＋y	194	196	198	200	202	204	206
確率①	0.0115	0.0481	0.1133	0.1508	0.1133	0.0481	0.0115
②	0.0481	0.1133	0.1508	0.1133	0.0481	0.0115	0.0016
③	0.0016	0.0115	0.0481	0.1133	0.1508	0.1133	0.0481

X と Y がいずれも100になる可能性に比べ合計の200になる可能性はより大きくなる。合計が200になる確率は［100, 100］以外に［101, 99］や［99, 101］，［102, 98］，［98, 102］等が存在するからである。

3−2. 分散だけが異なる場合

次に分散が異なる場合はどうであろうか。過去の標準偏差として，① $[\sqrt{VX_1},\ \sqrt{VY_1}]=[2.0,\ 1.0]$，② $[\sqrt{VX_2},\sqrt{VY_2}]=[3.0,\ 2.0]$，③ $[\sqrt{VX_3},\ \sqrt{VY_3}]=[4.0,\ 3.0]$ の3種類を想定する。また過去の期待値として，① $[EX_1,\ EY_1]=[100,\ 100]$ を，相関係数は上記と同じ0.5を想定する。

このとき合計の密度関数は，② $[\sqrt{VX_2},\ \sqrt{VY_2}]=[3.0,\ 2.0]$ では，

$$p_w(z)=\frac{1}{10.9261}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{38}\right),$$

③ $[\sqrt{VX_3},\ \sqrt{VY_3}]=[4.0,\ 3.0]$ では，

$$p_w(z)=\frac{1}{15.2472}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{74}\right),$$

である。

このとき T 時点に一定値 $[x,\ y]$ になる確率は次のように計算される。

予測値x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率①	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②	0.0095	0.0182	0.0269	0.0306	0.0269	0.0182	0.0095
③	0.0089	0.0120	0.0144	0.0153	0.0144	0.0120	0.0089
予測値x＋y	194	196	198	200	202	204	206
確率①	0.0115	0.0481	0.1133	0.1508	0.1133	0.0481	0.0115
②	0.0355	0.0601	0.0824	0.0915	0.0824	0.0601	0.0355
③	0.0403	0.0528	0.0621	0.0656	0.0621	0.0528	0.0403

ここでも $[x,\ y]=[100,\ 100]$ に比べ $[x+y]=[200]$ の確率はすべて大きく他の値でも同様であり，分散が広がるにしたがって確率は小さくなるが，$[x,\ y]=[100,\ 100]$ と $[x+y]=[200]$ を比較すれば，①より②や③のほうが相対的に確率が大きくなっている。$x+y$ になる可能性は分散が大きくなれば相対的に $x,\ y$ について範囲が拡大するためである。

3－3. 相関係数だけが異なる場合

次に相関係数だけが異なる場合はどうであろうか。過去の相関係数として，① $r=0.5$，② $r=0.9$，③ $r=0.3$ の3種類を想定する。過去の期待値は，①［EX_1, EY_1］＝［100, 100］を，標準偏差は①［$\sqrt{VX_1}$, $\sqrt{VY_1}$］＝［2.0, 1.0］を想定する。

このとき2次元正規分布の合計の密度関数は，② $r=0.9$ では，

$$p_w(z)=\frac{1}{7.3509}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{17.2}\right),$$

③ $r=0.3$ では，

$$p_w(z)=\frac{1}{6.2415}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{12.4}\right),$$

である。

それでは X と Y が全く無関係な動きをする $r=0$ の場合はどうであろうか。このとき $W=X+Y$ の確率密度関数は

$$p_w(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left(-\frac{(z-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$

であり，期待値が①［EX_1, EY_1］＝［100, 100］，標準偏差が①［$\sqrt{VX_1}$, $\sqrt{VY_1}$］＝［2.0, 1.0］では，合計の密度関数は，

$$p_w(z)=\frac{1}{5.6050}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{10}\right),$$

である。

X と Y が全く一致した動きをする $r=1$ の場合はどうであろうか。このとき合計の密度関数は

$$p_w(z)=\frac{1}{7.5199}\exp\left(-\frac{(z-200)^2}{18}\right),$$

である。

上記のそれぞれの密度関数の T 時点の一定値［$x+y$］に対応する確率を計算

すれば以下のようになる。

予測値x	97	98	99	100	101	102	103
y	97	98	99	100	101	102	103
確率							
①r＝0.5	0.0010	0.0124	0.0557	0.0919	0.0557	0.0124	0.0010
②r＝0.9	0.0000	0.0046	0.0727	0.1826	0.0727	0.0046	0.0000
③r＝0.3	0.0008	0.0103	0.0495	0.0834	0.0495	0.0103	0.0008
r＝0	0.0003	0.0065	0.0426	0.0796	0.0426	0.0065	0.0003
r＝1							
p(x)＝p(y)	0.0648	0.1210	0.1760	0.1995	0.1760	0.1210	0.0648
p(x)＝p(y)	0.0044	0.0540	0.2420	0.3989	0.2420	0.0540	0.0044
予測値x＋y	194	196	198	200	202	204	206
確率							
①r＝0.5	0.0115	0.0481	0.1133	0.1508	0.1133	0.0481	0.0115
②r＝0.9	0.0168	0.0537	0.1078	0.1360	0.1078	0.0537	0.0168
③r＝0.3	0.0088	0.0441	0.1160	0.1602	0.1160	0.0441	0.0088
r＝0	0.0049	0.0360	0.1196	0.1784	0.1196	0.0360	0.0049
r＝1	0.0180	0.0547	0.1065	0.1330	0.1065	0.0547	0.0180

［x, y］＝［100, 100］と［$x+y$］＝［200］を比較すれば，［x, y］＝［100, 100］では r が小さくなるにしたがって確率も小さくなるが，［$x+y$］＝［200］では $r=1$ では 0.1330 と最も小さく，$r=0$ では 0.1784 と最も大きい。相関係数が低いほど［$x+y$］＝［200］となる x と y の範囲が広くなるからである。x と y の実現可能性を個々にみるときには $r=1$ は標準偏差の異なる予想値は計算できないが，合計では計算できる。［$x+y$］では相関係数が小さくなるにしたがって期待値周辺の確率は大きくなるが，期待値から離れた値，例えば 194 では確率は小さくなる。合計の実現可能性の範囲が狭くなるためである。

4. 投資先の選択

一つの資産だけに投資するさいには，上記の例から時間とその資産の回帰分析や 1 次元の密度関数によって，将来の望ましい価格が最も実現可能性の高い

資産を選び購入することが有利である。二つの資産に複合的に投資するさいは，回帰分析や2次元の密度関数によって全体的な動きを予想して投資することが有利である。期待値や分散，相関係数を多様な資産から抽出し，回帰分析や密度関数から将来の動きを予測すれば，投資コストと確率的な収益の関係から有意義な情報を得ることができる。

過去の資料から得られた期待値や分散，相関係数等は経済環境の変化が存在すれば予測のさいに適宜修正する必要が生じる。どの程度に修正するべきかは別の分析によらなければならない。

参考文献

At-Sahalia, Yacine, and Michael W. Brandt, “Variable Selection for Portfolio Choice”, Journal of Finance, 56(2001), 1297-1351.

Alvarez, Femando, Andrew Atkeson, Patrick J. Kehoe, “Money, Interest Rates, and Exchange Rates with Endogenously Segmented Markets”, Journal of Political Economy, 110(2002), 73-112.

Blanchard, Olivier, Changyong Rhee and Lawrence Summers, “The Stock Market, Profit, and Investment,” Quarterly Journal of Economics, 108(1993), 115-136.

Brennan, Michael J., and Yihong Xia, “Dynamic Asset Allocation under Inflation”, Journal of Finance, 57(2002), 1201-38.

Calvet, Laurent, and Adlai Fisher, “Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence”, Review of Economics and Statistics, 84(2002), 381-406.

Campbell, John Y., “Asset Pricing at the Millennium”, Journal of Finance, 55(2000), 1515-67.

Faig, Miquel, and Pauline Shum, “Portfolio Choice in the Presence of Personal Illiquid Projects”, Journal of Finance, 57(2002), 303-28.

Heaton, John, and Deborah Lucas, “Portfolio Choice and Asset Prices: The Importance of Entrepreneurial Risk”, Journal of Finance, 55(2000), 1163-98.

Holmström, Bengt, and Jean Tirole, “LAPM: A Liquidity-Based Asset Pricing Model”, Journal of Finance, 56(2001), 1837-67.

Jacobs, Kris, “Incomplete Markets and Security Prices: Do Asset-Pricing Puzzles Result from Aggregation Problems?”, Journal of Finance, 54(1999), 123-63.

Pástor, Lubos, “Portfolio Selection and Asset Pricing Models”, Journal of Finance, 55(2000), 179-223.

Santis, Giorgio De, and Bruno Gerard, “International Asset Pricing and Portfolio

Diversification with Time-Varying Risk", Journal of Finance, 52(1997), 1881-1912.
Vissing-Jorgensen, Annette, "Limited Asset Market Participation and the Elasticity of Intertemporal Substitution", Journal of Political Economy, 110(2002), 825-53.